Kartkówka 29.05.2018

Zadanie 1. Dana jest funkcja uwikłana $y(x)$ spełniająca tożsamość

$$x^2 + x + y(x) + 2\sin(y(x)) = 2.$$

Wiedząc, że $y(1) = 0$, obliczyć $y'(1)$.

Różniczkując powyższą tożsamość, otrzymujemy po przekształceniach

$$\begin{aligned} 2x + 1 + y'(x) + 2\cos(y(x))y'(x) = 0,& \\ y'(x) &= -\frac{2x+1}{1+2\cos y(x)}, \\ y'(1) &= -\frac{2\cdot 1+1}{1+2\cos 0} = -1. \end{aligned}$$

Można też wykorzystać wzór będący częścią twierdzenia o funkcji uwikłanej. Tożsamość ma postać $F(x, y(x)) = 0$, gdzie

$$\begin{aligned} F(x,y) &= x^2 + x + y + 2\sin y - 2, \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= 2x + 1, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= 1 + 2\cos y. \end{aligned}$$

W punkcie $(0, 1)$ pochodna cząstkowa $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)$ jest niezerowa, więc twierdzenie o funkcji uwikłanej daje nam istnienie funkcji $y(x)$ lokalnie rozwikłującej równanie (co prawda to już było dane w treści zadania) oraz wzór na pochodną:

$$y'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)} = -\frac{3}{3} = -1.$$

Zadanie 2. Dane są funkcje $f, g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klasy C^1 i poziomica

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0 \right\}.$$

Zakładamy, że gradient ∇g nie zeruje się na M, w związku z czym M jest krzywą klasy C^1. Dodatkowo dany jest punkt $(x_0, y_0) \in M$, w którym obcięta funkcja $f \colon M \to \mathbb{R}$ ma ekstremum lokalne.

Rozstrzygnąć, czy poniższe zdania są zawsze prawdziwe:

Zachodzi $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.	TAK/NIE: **NIE**
Wektor $\nabla f(x_0, y_0)$ jest prostopadły do M w (x_0, y_0).	TAK/NIE: **TAK**
Wektor $\nabla f(x_0, y_0)$ jest styczny do M w (x_0, y_0).	TAK/NIE: **NIE**
Dla pewnej liczby $\lambda \in \mathbb{R}$ zachodzi $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.	TAK/NIE: **TAK**

Pierwszy warunek jest warunkiem koniecznym istnienia ekstremum lokalnego funkcji określonej na obszarze. Jednak w przypadku ekstremów związanych nie ma powodu sądzić, że gradient jest zerowy – wiadomo jedynie, że jest prostopadły do M.

Warunki drugi i czwarty są w opisanej w zadaniu sytuacji równoważne.